

Explicación de la velocidad de rotación en galaxias espirales
Interpretación Lagragiana
(Yul Goncalves, yulaldebran9@gmail.com)

A continuación se presenta una demostración de la velocidad de rotación en galaxias espirales, que puede coincidir en la forma observada en contraste con la interpretación Kepleriana. Para tal demostración se utiliza la ecuación de Euler-Lagrange o el Lagragiano, aplicada a una órbita de un objeto puntual de masa “m” que se moverá alrededor del centro galáctico de masa “M” separado una distancia dinámica “r”.

Veamos la siguiente fig.1 de la galaxia:

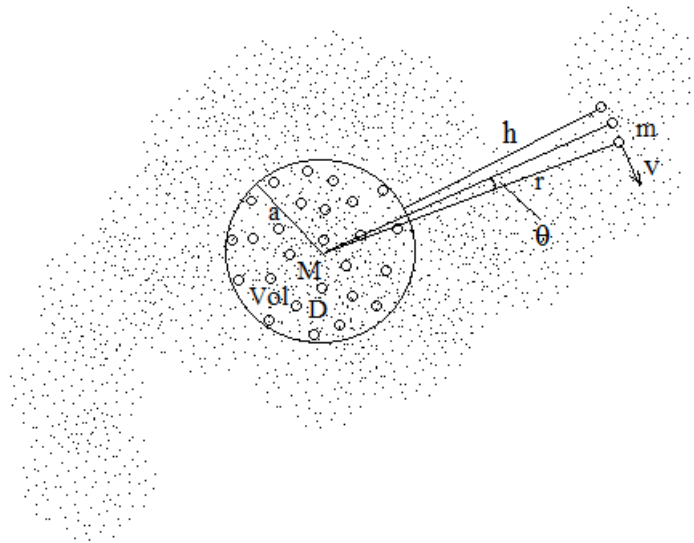


Fig.1

Análisis del Lagragiano:

- 1) El Lagragiano del objeto m viene dado por (sin usar relatividad):

$$L = Ec - Ep = \text{Energía cinética} - \text{Energía Potencial} \quad \text{ec. 0}$$

$$\text{siendo: } r = a + h ; h = r - a \quad \text{ec. 1}$$

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{GM}{r^2}mh \quad \text{ec. 2}$$

Siendo el cuadrado de la velocidad de rotación:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \quad \text{ec. 3}$$

Entonces el Lagragiano es:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{GM(r-a)}{r^2}m \quad \text{ec. 4}$$

2) Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange respecto al ángulo de rotación, tenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \text{ec. 5}$$

Observamos que:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

Luego sustituyendo en la ec.5:

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) - 0 = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$

Por lo tanto la cantidad dentro del paréntesis debe ser una constante:

$$mr^2\dot{\theta} = l = \text{constante}$$

De allí que podemos hacer:

$$\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2} \quad \text{ec. 6}$$

3) Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange respecto al radio de rotación, tenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad \text{ec. 7}$$

Observamos que:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{GMm}{r^2} + \frac{2GMma}{r^3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}$$

Luego sustituyendo en la ec.7:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{GMm}{r^2} - \frac{2GMma}{r^3} = 0$$

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{GM}{r^2} - \frac{2GMa}{r^3} = 0 \quad \text{ec. 8}$$

Ahora si sustituimos la **ec.6** en la **ec.8**, entonces:

$$\ddot{r} - r \frac{l^2}{m^2 r^4} + \frac{GM}{r^2} - \frac{2GMa}{r^3} = 0$$

$$\ddot{r} - \frac{l^2}{m^2 r^3} + \frac{GM}{r^2} - \frac{2GMa}{r^3} = 0 \quad \text{ec. 9}$$

Si multiplicamos toda la ecuación **ec.9** por $\dot{r}$, tendremos:

$$\dot{r}\ddot{r} - \frac{l^2}{m^2 r^3} \dot{r} + \frac{GM}{r^2} \dot{r} - \frac{2GMa}{r^3} \dot{r} = 0 \quad \text{ec. 10}$$

Se puede interpretar que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{r}^2}{2} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{l^2}{2m^2 r^2} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{GM}{r} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{GMa}{r^2} \right) = 0$$

Sacando el operador derivada:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2m^2 r^2} - \frac{GM}{r} + \frac{GMa}{r^2} \right) = 0$$

Concluimos que dentro del paréntesis debe ser una constante, esa constante es una velocidad al cuadrado, que la representaremos como V_c :

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2m^2 r^2} - \frac{GM}{r} + \frac{GMa}{r^2} = V_c^2$$

Al despejar $\dot{r}$:

$$\dot{r}^2 = 2 \left(V_c^2 + \frac{GM}{r} \right) - \left(\frac{l^2}{m^2} + 2GMa \right) \frac{1}{r^2} \quad \text{ec. 11}$$

$$\text{Recordando que: } v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \quad \text{ec. 3}$$

Al sustituir la **ec.11** y la **ec.6** en la **ec.3**, resulta:

$$v^2 = 2V_c^2 + 2\frac{GM}{r} - 2\frac{GMa}{r^2}$$

Por la tanto queda demostrado que la velocidad de rotación orbital, tiende a una velocidad distinta de cero y viene dada por:

$$v(r) = \left(2V_c^2 + 2\frac{GM}{r} - 2\frac{GMa}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ec. 12}$$

$$\text{Si llamamos } V_a = v(r = a) = V_c\sqrt{2} \quad \text{ec. 13}$$

La ec.12, tiene un pico en $r = 2a$ en ese punto la velocidad alcanza un máximo igual a:

$$V_p = v(r = 2a) = \left(2V_c^2 + \frac{GM}{2a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ec. 14}$$

- 4) Interpretación de la velocidad de rotación orbital dada por la **ec.12**. Para ello veamos la fig.1 de la galaxia, y observemos la siguiente gráfica fig.2:

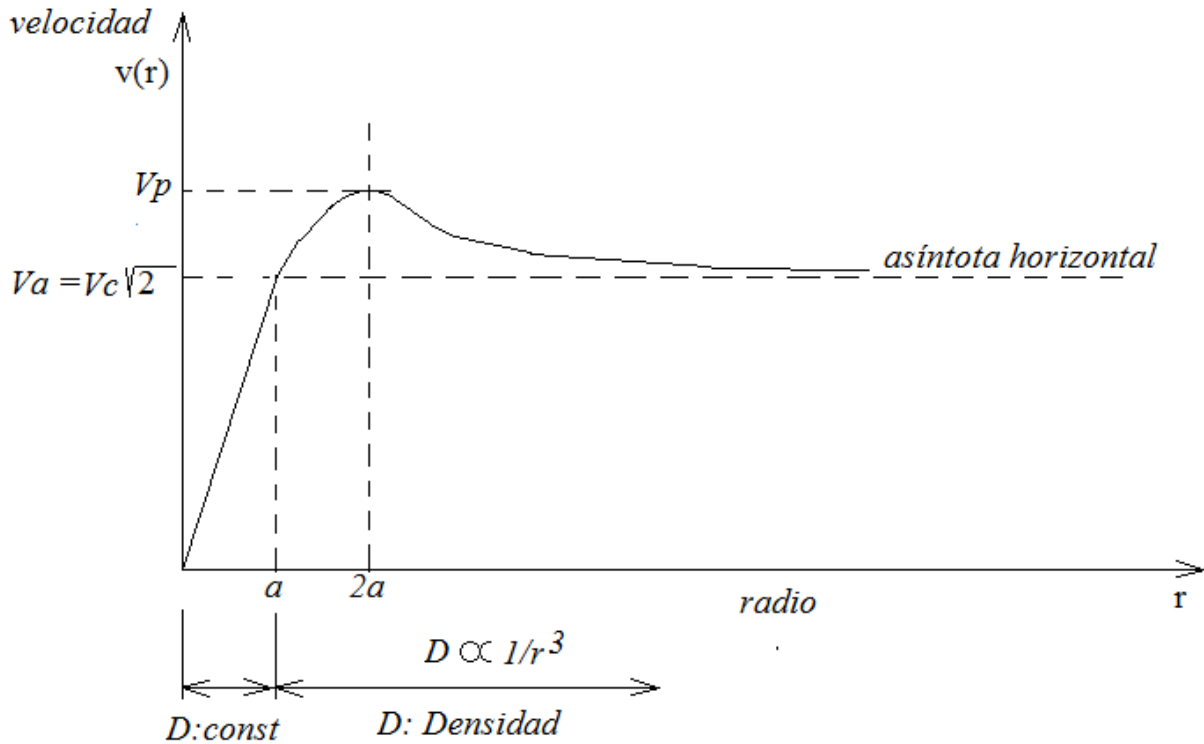


Fig.2

- a) En el rango de radio $r \in [0, a]$, para reconstruir la gráfica de la fig.2 y viendo la fig.1, dentro del volumen "Vol", como normalmente se hace, podemos aproximarnos a una densidad constante D, dentro del radio "a" :

$$D = \frac{M}{(4\pi/3)r^3} \Rightarrow M(r) = D \cdot \left(\frac{4\pi}{3}\right) r^3 \text{ con } r \in [0, a]$$

Usando la misma **ec.12** dentro del radio a , ella se reduce a la siguiente ecuación, y sustituyendo la $M(r)$ anterior, nos queda:

$$v(r) = \left(2V_c^2 + 2 \frac{GM(r)}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v(r) = \left(2V_c^2 + 2G \cdot D \cdot \left(\frac{4\pi}{3}\right) r^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Al ver la gráfica fig.2, notamos que en el radio 0 la velocidad $v(0)=0$, entonces:

$$v(r=0) = \left(2V_c^2 + 2G \cdot D \cdot \left(\frac{4\pi}{3}\right) \cdot 0^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

Por lo tanto:

$$v(0) = 0 = (2V_c^2 + 0)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow V_c = 0$$

Vemos también que en el radio a , la velocidad V_a es:

$$v(r=a) = V_a = \left(2G \cdot D \cdot \left(\frac{4\pi}{3}\right) \cdot a^2\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow G \cdot D = \frac{(V_a)^2}{2 \left(\frac{4\pi}{3}\right) \cdot a^2}$$

Por lo tanto deducimos que dentro del radio a :

$$v(r) = \left(2 \cdot \frac{(V_a)^2}{2 \left(\frac{4\pi}{3}\right) \cdot a^2} \cdot \left(\frac{4\pi}{3}\right) \cdot r^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

En definitiva en el rango de radio $r \in [0, a]$, la **ec.15** evidencia una recta como lo corrobora la observación real en las galaxias elípticas:

$$v(r) = V_a \left(\frac{r}{a}\right) \quad \text{ec. 15}$$

- 5) Interpretación kleperiana, la cual sabemos que parte de pensar que la velocidad de rotación en $r \in [a, \infty]$, es:

$$v(r) = \left(\frac{GM}{r} \right)^{1/2} \quad \text{ec. 16} \quad \text{para ella } GM = a \cdot V_a^2 \quad \text{entonces:}$$

$$v(r) = V_a \left(\frac{a}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ec. 17} \quad \text{Interpretación Kleperiana}$$

- 6) Resumen comparativo de las ecuaciones deducidas:

La interpretación Lagragiana y kepleriana coinciden en el rango $r \in [0, a]$

$$v(r) = V_a \left(\frac{r}{a} \right) \quad \text{ec. 15}$$

Interpretación Lagragiana en el rango $r \in [a, \infty]$:

$$v(r) = \left(2V_c^2 + 2 \frac{GM}{r} - 2 \frac{GMa}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ec. 12}$$

Siendo llamamos $V_a = V_c \sqrt{2}$

$$v(r) = \left(V_a^2 + 2 \frac{GM}{r} - 2 \frac{GMa}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ec. 18}$$

Interpretación Kleperiana en el rango $r \in [a, \infty]$:

$$GM = a \cdot V_a^2$$

$$v(r) = V_a \left(\frac{a}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ec. 17}$$

- 7) Uso de Excel para graficar, usando el resumen comparativo de las ecuaciones deducidas, usando valores imaginarios o genéricos (Se intenta modelar la galaxia NGC 4378):

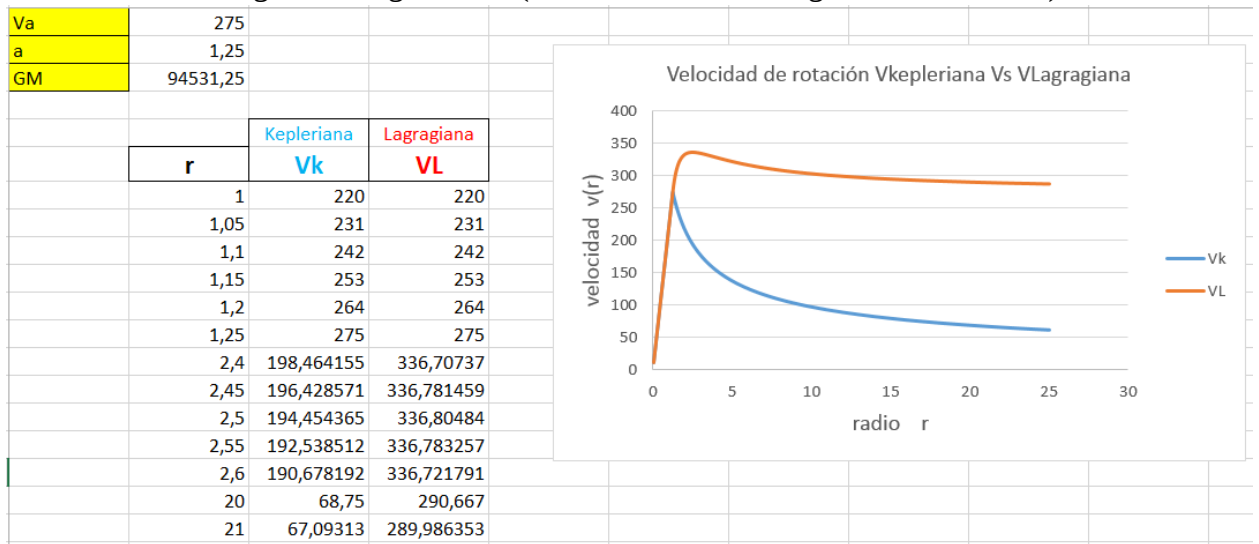


Fig.3

- 8) Algunas gráficas tomadas de Internet con curvas reales de rotación de galaxias y comparadas con una interpretación teórica Kepleriana:

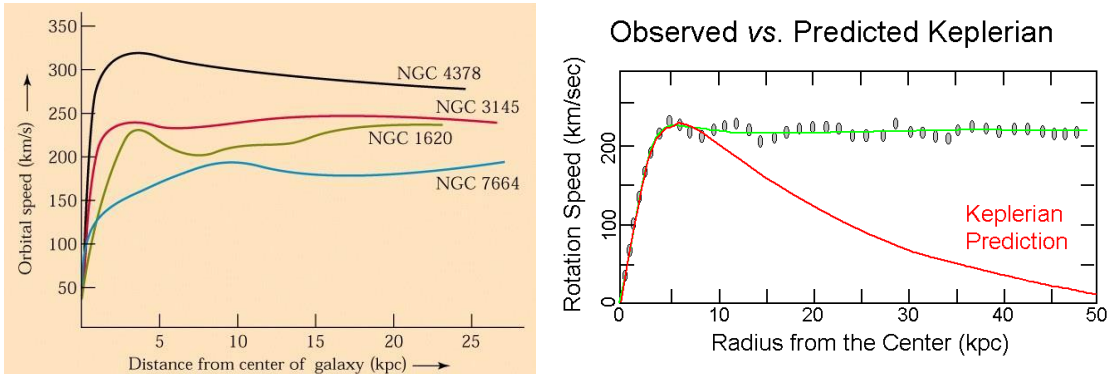


Fig.4 y 5

9) Como observamos la interpretación Kleperiana hace decaer a cero (0) la velocidad a medida que el radio “r” aumenta. Mientras que la interpretación Lagragiana, previamente deducida, tiende a una asíntota horizontal de velocidad distinta de cero, dando una curva aplanada a medida que el radio aumenta. Esta interpretación Lagragiana es compatible con la observación real de las galaxias, por tal motivo, hay una coincidencia y en un primer momento vuelven a encontrarse la teoría con la realidad.